Aproximación de la distribución binomial por la normal. Ejercicios resueltos

1. **Calcula las probabilidades de las siguientes distribuciones binomiales mediante aproximación a la normal correspondiente (en todas ellas, ten en cuenta el ajuste de media unidad que hay que hacer al pasar de una variable discreta a una continua):**

a) x **es** $B(100; 0{,}1)$. **Calcula** $P[x = 10]$, $P[x < 2]$ **y** $P[5 < x < 15]$.

b) x **es** $B(1\,000; 0{,}02)$. **Calcula** $P[x > 30]$ **y** $P[x < 80]$.

c) x **es** $B(50; 0{,}9)$. **Calcula** $P[x > 45]$ **y** $P[x \le 30]$.

a) x es $B(100; 0{,}1) \approx x'$ es $N(10; 3)$

$P[x = 10] = P[9{,}5 < x' < 10{,}5] = P[-0{,}17 < z < 0{,}17] = 0{,}135$

$P[x < 2] = P[x' \le 1{,}5] = P[z \le -2{,}83] = 0{,}0023$

$P[5 < x < 15] = P[5{,}5 \le x' \le 14{,}5] = P[-1{,}5 \le z \le 1{,}5] = 0{,}8664$

b) x es $B(1\,000; 0{,}02) \approx x'$ es $N(20; 4{,}427)$

$P[x > 30] = P[x' \ge 30{,}5] = P[z \ge 2{,}37] = 0{,}0089$

$P[x < 80] = P[x' \le 79{,}5] = P[z \le 13{,}44] = 1$

c) x es $B(50; 0{,}9) = x'$ es $N(45; 2{,}12)$

$P[x > 45] = P[x' \ge 45{,}5] = P[z \ge 0{,}24] = 0{,}4052$

$P[x \le 30] = P[x' \le 30{,}5] = P[z \le -6{,}83] = 0$

15 **Si lanzamos un dado mil veces, ¿cuál es la probabilidad de que el número de cincos obtenidos sea menor que 100?**

x es $B(1\,000; 0{,}1667) \rightarrow x'$ es $N(166{,}67; 11{,}79)$

$P[x < 100] = P[x' \le 99{,}5] = P[z \le -5{,}70] = 0$

16 **Una moneda se lanza 400 veces. Calcula la probabilidad de que el número de caras:**

a) Sea mayor que 200. **b) Esté entre 180 y 220.**

x es $B(400; 0{,}5) \rightarrow x'$ es $N(200, 10)$

a) $P[x > 200] = P[x' \ge 200{,}5] = P[z \ge 0{,}05] = 0{,}4801$

b) $P[180 < x < 220] = P[180{,}5 \le x' \le 219{,}5] = P[-1{,}95 \le z \le 1{,}95] = 0{,}9488$

17 **En un bombo de lotería tenemos 10 bolas idénticas numeradas del 0 al 9, y cada vez que hacemos la extracción de una bola la devolvemos al bombo.**

a) Si sacamos tres bolas, calcula la probabilidad de que el 0 salga una sola vez.

b) Si hacemos 100 extracciones, calcula la probabilidad de que el 0 salga más de 12 veces.

a) x es $B(3; 0{,}1)$

$P[x = 1] = 3 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9^2 = 0{,}243$

b) x es $B(100; 0{,}1) \rightarrow x'$ es $N(10, 3)$

$P[x > 12] = P[x' \geq 12{,}5] = P[z \geq 0{,}83] = 0{,}2033$

24 **La probabilidad de que una jugadora de golf haga hoyo en un lanzamiento a cierta distancia es 0,2. Si lanzara 1 000 veces y su capacidad de acierto se mantuviera, ¿qué probabilidad hay de que acierte más de 220 veces?**

Se trata de una $B(1000; 0{,}2)$. La probabilidad la calculamos por aproximación normal:

$\mu = 1000 \cdot 0{,}2 = 200; \quad \sigma = \sqrt{1000 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8} = 12{,}65$

x es $B(1000; 0{,}2) \rightarrow x'$ es $N(200; 12{,}65)$

$P[x > 220] = P[x' \geq 220{,}5] = P[z \geq 1{,}62] = 1 - 0{,}9474 = 0{,}0526$

25 **Una máquina produce tornillos. Sabemos por experiencia que el 4% de ellos son defectuosos. Se empaquetan automáticamente en cajas de 200 tornillos. Halla las siguientes probabilidades relativas al número de tornillos defectuosos en una caja tomada al azar:**

a) $x < 10$ **b)** $x > 10$ **c)** $x = 8$

Se trata de una distribución binomial $B(n, p)$ donde $n = 200$ y $p = 0{,}002$.

Como $np > 3$ y $n(1 - p) > 3$, podemos aproximarla a una distancia normal.

$B(200; 0{,}02) \rightarrow N(4; 1{,}98)$

a) $P[x < 10] = P[x' < 9{,}5] = P\left[z < \dfrac{9{,}5 - 4}{1{,}98}\right] = P[z < 2{,}78] = 0{,}9973$

b) $P[x > 10] = P[x' > 10{,}5] = P\left[z > \dfrac{10{,}5 - 4}{1{,}98}\right] = P[z > 3{,}28] =$

$= 1 - P[z < 3{,}28] = 1 - 0{,}9995 = 0{,}0005$

c) $P[x = 8] = P[7{,}5 < x' < 8{,}5] = P\left[\dfrac{7{,}5 - 4}{1{,}98} < z < \dfrac{8{,}5 - 4}{1{,}98}\right] =$

$= P[1{,}77 < z < 2{,}27] = P[z < 2{,}27] - P[z > 1{,}77] =$

$= P[z < 2{,}27] - (1 - P[z < 1{,}77]) =$

$= 0{,}9884 - 1 + 0{,}9616 = 0{,}95$

26 **Un centro de enseñanza va a presentar, este curso, 240 alumnos al examen de selectividad y se sabe que, de ese centro, suele aprobar el 95% de los presentados. ¿Cuál es la probabilidad de que aprueben:**

a) más de 200, **b) más de 220,**

c) más de 230, **d) más de 235 alumnos?**

x es $B(240; 0{,}95) \rightarrow x'$ es $N(228; 3{,}38) \rightarrow z$ es $N(0, 1)$

a) $P[x > 200] = P[x' \geq 200{,}5] = P[z \geq -8{,}13] = 1$

b) $P[x > 220] = P[x' \geq 220{,}5] = P[z \geq -2{,}22] = 0{,}9868$

c) $P[x > 230] = P[x' \geq 230{,}5] = P[z \geq 0{,}74] = 0{,}2296$

d) $P[x > 235] = P[x' \geq 235{,}5] = P[z \geq 2{,}22] = 0{,}0132$

27 **Un examen tiene 38 preguntas del tipo Verdadero-Falso. El examen se aprueba si se contestan correctamente al menos 20 preguntas.**

Si se responde al azar, halla:

a) La probabilidad de aprobar el examen.

b) La probabilidad de que el número de respuestas correctas esté entre 25 y 30.

x es $B(38; 0{,}5) \rightarrow x'$ es $N(19; 3{,}08)$

a) $P[x \geq 20] = P[x' \geq 19{,}5] = P[z \geq 0{,}16] = 0{,}4364$

b) $P[25 < x < 30] = P[25{,}5 \leq x' \leq 29{,}5] = P[2{,}11 \leq x' \leq 3{,}41] = 0{,}0171$

28 **En las últimas elecciones celebradas en cierto país, la abstención fue del 25% del censo electoral.**

a) Si se seleccionan al azar tres individuos del censo, ¿cuál es la probabilidad de que ninguno haya votado?

b) Si se toman al azar 100 miembros del censo, ¿cuál es la probabilidad de que se hayan abstenido al menos 30?

a) x es $B(3; 0{,}25)$

$P[x = 3] = 0{,}25^3 = 0{,}0156$

b) x es $B(100; 0{,}25) \rightarrow x'$ es $N(25; 4{,}33)$

$P[x \geq 30] = P[x' \geq 29{,}5] = P[z \geq 1{,}04] = 0{,}1492$

29 **Un examen tipo test tiene 50 preguntas y cada pregunta tres respuestas diferentes, solo una de las cuales es correcta.**

Para aprobar, hace falta responder correctamente a 25 preguntas; para un notable, 35; y para un sobresaliente, 45 respuestas.

Un estudiante responde al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que apruebe? ¿Y la de que saque un notable? ¿Y un sobresaliente?

x es $B(50; 0{,}333) \rightarrow x'$ es $N(16{,}66; 3{,}33)$

$P[x \geq 25] = P[x' \geq 24{,}5] = P[z \geq 2{,}35] = 0{,}0094 \rightarrow$ probabilidad de aprobar

$P[x \geq 35] = P[x' \geq 34,5] = P[z \geq 5,36] = 0$

La probabilidad de sacar notable o sobresaliente es 0.

AUTOEVALUACIÓN

7. **El 7% de las personas padecen un pequeño defecto anatómico de origen genético. En una empresa trabajan 80 personas. ¿Cuál es la probabilidad de que haya más de 10 con ese defecto?**

x es $B(80; 0,07) \rightarrow \mu = 80 \cdot 0,07 = 5,6; \ \sigma = \sqrt{80 \cdot 0,07 \cdot 0,93} = \sqrt{5,208} = 2,28$

x' es $N(5,6; 2,28)$; $P[x > 10] = P[x \geq 11] = P[x' \geq 10,5] = P\left[z \geq \dfrac{10,5 - 5,6}{2,28}\right] =$

$= P[z \geq 2,15] = 1 - \phi(2,15) = 1 - 0,9842 = 0,0158$